

## Théorie Dynamique de la Diffraction Magnétique des Neutrons

PAR JEAN SIVARDIÈRE

*Département de Recherche Fondamentale, Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, B.P. 85,  
38041 Grenoble Cedex, France*

(Reçu le 4 décembre 1974, accepté le 8 janvier 1975)

The dynamical theory of magnetic diffraction of neutrons is investigated within the two-wave approximation. In ferromagnets the dispersion surface  $\Sigma$  is of order 4: quadruple refraction and diffraction are found; in general the wave fields are not polarized. In antiferromagnets,  $\Sigma$  is in general made of two hyperboloids, each of them corresponding to a given polarization of the propagating neutron.

### I. Introduction

Les phénomènes dynamiques qui accompagnent la diffraction des rayons X et des électrons sont bien connus (Batterman & Cole, 1964; Kato, 1964). Le cas de la diffraction nucléaire des neutrons a été moins étudié (Goldberger & Seitz, 1947; Herpin, 1957; Shull, 1968). Nous envisageons dans cette note le cas de la diffraction magnétique des neutrons (Ekstein, 1949; Hamilton, 1958).

Dans § II, nous rappelons schématiquement la théorie dynamique de la diffraction nucléaire. Dans § III, nous calculons l'équation de la surface de dispersion relative à la diffraction sur un cristal magnétique. Dans § IV, nous décrivons quelques cas particuliers: composés ferrimagnétiques et antiferromagnétiques. Le cas de la diffusion nucléaire magnétique est envisagé en Appendice.

### II. Théorie dynamique de la diffraction nucléaire

Considérons tout d'abord la propagation d'un neutron dans un cristal non magnétique (nous ignorons le magnétisme nucléaire éventuel). La fonction d'onde scalaire  $\psi(r)$  du neutron satisfait l'équation de Schrödinger:

$$\Delta\psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)]\psi(r) = 0 \quad (1)$$

ou:

$$(\Delta + k^2)\psi(r) - N(r)\psi(r) = 0. \quad (2)$$

$\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du neutron dans le vide,  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  son énergie dans le vide.  $V(r)$  est le potentiel diffuseur, purement nucléaire, du cristal et:

$$N(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r). \quad (3)$$

$\psi(r)$  est une fonction de Bloch (champ d'ondes):

$$\psi(r) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \sum_{\mathbf{K}} \psi_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}). \quad (4)$$

$\mathbf{k}_0$  est le vecteur d'onde de l'onde réfracté. Si  $N_{\mathbf{K}}$  désigne le facteur de structure nucléaire:

$$N(r) = \sum_{\mathbf{K}} N_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}). \quad (5)$$

En reportant dans (2) les expressions (4) et (5) de  $\psi(r)$  et  $N(r)$ , et en multipliant par  $\int \exp[i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}] d^3r$ , nous obtenons le système (avec  $\mathbf{k}_{\mathbf{K}} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{K}$ ):

$$(k^2 - k_{\mathbf{K}}^2)\psi_{\mathbf{K}} - \sum_{\mathbf{K}'} N_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'} \psi_{\mathbf{K}'} = 0. \quad (6)$$

L'annulation de son déterminant exprime la conservation de l'énergie et fournit l'équation de la surface de dispersion de Bethe.

#### Réfraction

Si l'extrémité du vecteur  $\mathbf{k}$  est éloignée de la surface d'une zone de Brillouin, le cristal apparait comme homogène: seule la composante  $\psi_0$  du champ est appréciable et, contrairement au cas des rayons X, il y a simple réfraction. La surface de dispersion est une sphère de centre 0 et de rayon  $k_0$ . L'indice  $n$  du cristal, défini par:  $k_0 = nk$ , est donné par l'équation (6):

$$1 - n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N_0}{E} \quad (7)$$

$$n \simeq 1 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N_0}{2E}. \quad (8)$$

#### Diffraction

Au voisinage d'une surface de zone, on peut résoudre (6) dans l'approximation de Peierls à deux ondes. Cette approximation est valable car, pour les neutrons comme pour les rayons X, le rayon de la sphère d'Ewald est du même ordre de grandeur que les côtés de la maille réciproque.

Posant:

$$\psi = \psi_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + \psi_{\mathbf{K}} \exp[i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}] \quad (9)$$

le système (6) s'écrit:

$$\begin{aligned} (k^2 - k_0^2 - N_0)\psi_0 - N_{-\mathbf{K}}\psi_{\mathbf{K}} &= 0 \\ -N_{\mathbf{K}}\psi_0 + (k^2 - k_{\mathbf{K}}^2 - N_0)\psi_{\mathbf{K}} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

D'où, en annulant le déterminant de (10), l'équation de la surface de dispersion  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est une surface équiénergétique: chaque point  $P$  de  $\Sigma$  définit un champ d'ondes d'énergie  $E$  égale à celle du neutron incident dans le vide. Posant:  $k^2 - N_0 = \chi^2$ , nous obtenons:

$$(\chi^2 - k_0^2)(\chi^2 - k_{\mathbf{K}}^2) = N_{\mathbf{K}} \cdot N_{-\mathbf{K}}. \quad (11)$$

$\Sigma$  est donc engendrée par une hyperbole dont les asymptotes sont tangentes aux cercles  $\chi = \mathbf{k}_0$  et  $\chi = \mathbf{k}_K$  au point de Laue  $L$ . La construction d'Huyghens est illustrée par la Fig. 1 (cas de Laue,  $OL = KL = \chi$ ): il y a excitation des champs d'ondes  $P_1$  et  $P_2$ , donc double réfraction et double diffraction.  $MO = \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{v}$  est la direction normale à la face d'entrée du cristal. Pour  $k_0 = k_K$  ( $P_1$  et  $P_2$  sur la médiatrice de  $OK$ ), les indices du cristal sont donnés par:

$$1 - n^2 = \frac{N_0 \pm |N_K|}{k^2}, \quad (12)$$

et dépendent donc de  $\mathbf{K}$ .

### III. Théorie dynamique de la diffraction magnétique

Dans les processus élastiques et cohérents de diffusion par les électrons magnétiques, l'état de spin du neutron peut varier, la variation du moment étant alors acceptée par l'ensemble du cristal. On doit donc considérer que la fonction d'onde du neutron est un spineur:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}}^+ \\ \psi_{\mathbf{K}}^- \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}). \quad (13)$$

Le potentiel diffuseur du cristal est maintenant l'opérateur de spin:  $\hbar^2/2mN(r) - \boldsymbol{\mu}_n \cdot \mathbf{B}(r)$ . L'opérateur  $N(r)$  est diagonal;  $\boldsymbol{\mu}_n = -|\gamma\hbar/2mc|\boldsymbol{\sigma}$  est l'opérateur moment magnétique du neutron,  $\boldsymbol{\sigma}$  le vecteur de Pauli,  $B(r)$  l'induction créée dans le cristal par les électrons magnétiques:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K}} B_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}). \quad (14)$$

Introduisons le vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} = \mathbf{K}/|\mathbf{K}|$ , et le facteur de structure magnétique  $F_{\mathbf{K}}$ :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{K}}) - F_{\mathbf{K}} \quad (15)$$

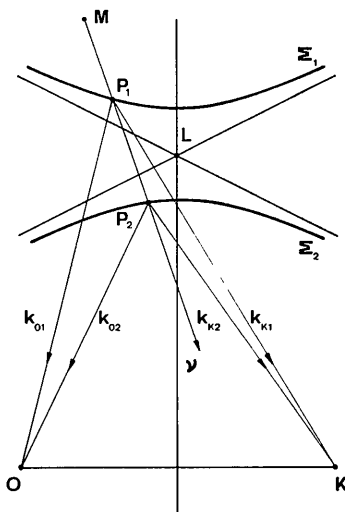


Fig. 1. Diffraction nucléaire sur un cristal non magnétique.  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont les deux nappes de la surface de dispersion,  $L$  est le point de Laue,  $P_1$  et  $P_2$  définissent les deux champs d'ondes excités.

$\mathbf{B}_{\mathbf{K}}$  est perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}$  (Ekstein, 1949).  $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}$  est maintenant noté  $\mathbf{Q}_{\mathbf{K}}$  selon l'habitude (Sivardière, 1967) et, afin d'alléger l'écriture, nous n'indiquons plus dans la suite les constantes  $2m/\hbar^2$  et  $|\gamma\hbar/2mc|$ . L'équation de Schrödinger (2) s'écrit:

$$(\Delta + k^2) \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} - [N(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}(r)] \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = 0, \quad (16)$$

ou encore en supposant que le vecteur  $\mathbf{Q}_{\mathbf{K}}$  est réel – mais cette restriction n'a rien d'essentiel – et en notant  $z$  la direction de quantification et  $\mathbf{Q}^{\pm} = Q_x \pm iQ_y$ :

$$\begin{pmatrix} \Delta + k^2 - N - Q_z & -Q^- \\ -Q^+ & \Delta + k^2 - N + Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = 0. \quad (17)$$

Le système (6) devient alors:

$$\begin{pmatrix} k^2 - k_{\mathbf{K}}^2 & 0 \\ 0 & k^2 - k_{\mathbf{K}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}}^+ \\ \psi_{\mathbf{K}}^- \end{pmatrix} - \sum_{\mathbf{K}'} \begin{pmatrix} N_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'} + Q_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^z & Q_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^- \\ Q_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^+ & N_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'} - Q_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}'}^+ \\ \psi_{\mathbf{K}'}^- \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

#### Réfraction

Loin d'une position de Bragg, le système (18) se réduit au système suivant (avec  $Q_0 = -F_0$ ,  $F_0$  étant le moment résultant d'une maille magnétique):

$$\begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 - (N_0 + Q_0^z) & -Q_0^- \\ -Q_0^+ & k^2 - k_0^2 - (N_0 - Q_0^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^- \end{pmatrix} = 0. \quad (19)$$

La conservation de l'énergie s'exprime en annulant le déterminant de (19), d'où:

$$k^2 - (k_0^{\pm})^2 = N_0 \pm Q_0 \quad (20)$$

$$1 - n_{\pm}^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (N_0 \pm Q_0). \quad (21)$$

Si  $Q_0 = 0$  (cristal antiferromagnétique), il y a simple réfraction: l'indice du cristal ne dépend pas de l'état de spin du neutron incident,  $\Sigma$  est une sphère de centre 0 et de rayon  $k_0$ . Si  $Q_0 \neq 0$  (cristal ferro ou ferrimagnétique),  $\Sigma$  se compose de deux sphères de centre 0 et de rayons respectifs  $k_0^+$  et  $k_0^-$ . On peut quantifier selon  $Q_0$ : on voit que les ondes (6) et (7) peuvent se propager avec les vecteurs d'onde respectifs  $\mathbf{k}_0^+$  et  $\mathbf{k}_0^-$ . Si l'onde dans le vide est (8)  $\exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$ , l'onde réfractée est:

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{k}_0^+ \cdot \mathbf{r}) + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{k}_0^- \cdot \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} a \\ b \exp(i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{k}_0^+ \cdot \mathbf{r})$$

avec:  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_0^- - \mathbf{k}_0^+$ ; la polarisation suivant  $\mathbf{Q}_0$ , égale à  $|a|^2 - |b|^2$  est conservée: il y a précession du spin du neutron autour de  $\mathbf{Q}_0$ . Si on quantifie suivant une direction autre que  $\mathbf{Q}_0$ , les opérateurs  $Q_0^+$  et  $Q_0^-$ , d'après (19), mélangent les deux états de polarisation: il y a alors rotation de la direction de polarisation à la fréquence de Larmor.

### Diffraction

Au voisinage d'une position de Bragg, le système (18) s'écrit, dans une approximation à deux ondes:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 - (N_0 + Q_0^z) & -Q_0^- \\ -Q_0^+ & k^2 - k_0^2 - (N_0 - Q_0^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^- \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} N_{-K} + Q_{-K}^z & Q_{-K}^- \\ Q_{-K}^+ & N_{-K} - Q_{-K}^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_K^+ \\ \psi_K^- \end{pmatrix} = 0 \\ & - \begin{pmatrix} N_K + Q_K^z & Q_K^- \\ Q_K^+ & N_K - Q_K^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^- \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} k^2 - k_K^2 - (N_0 + Q_0^z) & -Q_0^- \\ -Q_0^+ & k^2 - k_K^2 - (N_0 - Q_0^z) \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \psi_K^+ \\ \psi_K^- \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Posons pour simplifier:

$$\begin{aligned} k^2 - k_0^2 - (N_0 \pm Q_0^z) &= \chi_{\pm}^2 - k_0^2 = A_0^{\pm} \\ k^2 - k_K^2 - (N_0 \pm Q_0^z) &= \chi_{\pm}^2 - k_K^2 = A_K^{\pm}, \end{aligned} \quad (23)$$

le système (22) devient:

$$\begin{pmatrix} A_0^+ & -(N_{-K} + Q_{-K}^z) & -Q_0^- & -Q_{-K}^- \\ -(N_K + Q_K^z) & A_K^+ & -Q_K^- & -Q_0^- \\ -Q_0^+ & -Q_{-K}^+ & A_0^- & -(N_{-K} - Q_{-K}^z) \\ -Q_K^+ & -Q_0^+ & -(N_K - Q_K^z) & A_K^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_K^+ \\ \psi_0^- \\ \psi_K^- \end{pmatrix} = 0. \quad (24)$$

On reconnaît les amplitudes partielles de diffusion

$$U^{\pm\pm} = N_K \pm Q_K^z \quad \text{et} \quad U^{\pm\mp} = -Q_K^{\pm}$$

(Moon, Riste & Koehler, 1969). L'annulation du déterminant de (22) donne l'équation de la surface  $\Sigma$ .

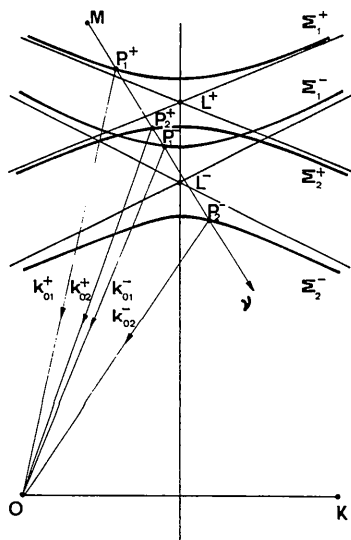


Fig. 2. Diffraction sur un cristal ferro- ou ferrimagnétique: cas d'une raie purement nucléaire.  $\Sigma_1^+$  et  $\Sigma_2^+$  sont les deux nappes de  $\Sigma$  décrivant les champs d'ondes de polarisation positive;  $\Sigma_1^-$  et  $\Sigma_2^-$  sont les deux nappes de  $\Sigma$  décrivant les champs d'ondes de polarisation négative.  $L^+$  et  $L^-$  sont les deux points de Laue:  $OL^+ = \chi^+$  et  $OL^- = \chi^-$ . La direction de quantification est celle de l'aimantation. Seuls sont représentés le rayon incident et les quatre rayons réfractés.

### IV. Etude de quelques cas particuliers

Considérons tout d'abord le cas d'un cristal ferro- ou ferrimagnétique, de structure magnétique colinéaire ou non, et d'une raie mixte. La quantification selon  $\mathbf{Q}_0$  s'impose:  $Q_0^{\pm} = 0$ .  $\Sigma$  est alors une surface du quatrième degré en  $k^2$ , d'équation:

$$\begin{aligned} & A_0^+ A_0^- A_K^+ A_K^- - A_K^+ A_K^- Q_{-K}^+ Q_{-K}^- - A_0^- A_K^+ Q_K^+ Q_{-K}^- \\ & + Q_K^- Q_K^+ Q_{-K}^+ Q_{-K}^- + [N_K^2 - (Q_K^z)^2] [N_{-K}^2 - (Q_{-K}^z)^2] \\ & - A_0^+ A_K^+ (N_K - Q_K^z) (N_{-K} - Q_{-K}^z) - A_0^- A_K^- (N_K + Q_K^z) \\ & + (N_{-K} + Q_{-K}^z) - Q_K^+ Q_K^- [N_{-K}^+ - (Q_{-K}^z)^2] \\ & - Q_{-K}^+ Q_{-K}^- [N_K^2 - (Q_K^z)^2] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Cette équation permet de déterminer quatre valeurs de l'indice du cristal à la position de Bragg: au voisinage de cette position,  $\Sigma$  se compose de quatre nappes, il y a quadruple réfraction et quadruple diffraction. En général même si la raie est purement magnétique (raie de surstructure d'un ferromagnétique à structure non colinéaire), en raison de la présence des opérateurs  $Q_K^{\pm}, Q_{-K}^{\pm}, \dots$  dans (24), un champ d'ondes n'est pas

polarisé. Cependant si le vecteur de diffusion est perpendiculaire à l'aimantation,  $\mathbf{Q}_K$  est parallèle à  $\mathbf{Q}_0$ , donc  $Q_{\pm K}^z = 0$ ; (25) se réduit à:

$$\begin{aligned} & [A_0^+ A_K^+ - (N_K + Q_K^z) (N_{-K} + Q_{-K}^z)] [A_0^- A_K^- \\ & - (N_K - Q_K^z) (N_{-K} - Q_{-K}^z)] = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

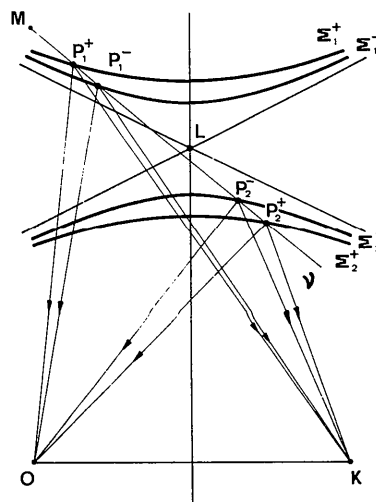


Fig. 3. Diffraction sur un cristal antiferromagnétique: cas d'une raie mixte.  $\Sigma$  se compose de deux hyperboles de mêmes asymptotes, chacune décrit des champs d'ondes polarisés. Il y a un seul point de Laue  $L$ .  $\mathbf{Q}_K$  est la direction de quantification.

$\Sigma$  se décompose en deux surfaces distinctes  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  et les champs d'ondes sont polarisés.

Si la raie considérée est purement nucléaire,  $\mathbf{Q}_K = \mathbf{Q}_{-K} = 0$ . L'équation de  $\Sigma$  est:

$$(A_0^+ A_K^+ - N_K \cdot N_{-K}) (A_0^- A_K^- - N_K N_{-K}) = 0. \quad (27)$$

$\Sigma$  est engendrée par deux hyperboles  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  (Fig. 2), dont les asymptotes sont tangentes aux cercles:  $\mathbf{k}_0 = \chi^\pm$  et  $\mathbf{k}_K = \chi^\pm$ . Pour  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_K$ , l'indice est donné par:

$$1 - n_K^2 = \frac{N_0 \pm Q_0^\pm \pm |N_K|}{E}. \quad (28)$$

Les champs d'ondes sont polarisés, la diffraction nucléaire n'affectant pas la polarisation: seuls les champs d'ondes de même polarisation peuvent interférer pour donner des franges de Pendellosüng.

Considérons maintenant un cristal antiferromagnétique de structure colinéaire ou non et une raie mixte:  $\mathbf{Q}_0 = 0$ , on peut quantifier selon  $\mathbf{Q}_K$ .  $A_0^+ = A_0^-$  et  $A_K^+ = A_K^-$  d'où l'équation de  $\Sigma$ :

$$[A_0 A_K - (N_K + Q_K^z) (N_{-K} + Q_{-K}^z)] \times [A_0 A_K - (N_K - Q_K^z) (N_{-K} - Q_{-K}^z)] = 0. \quad (29)$$

$\Sigma$  est engendrée (Fig. 3) par deux hyperboles  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  de mêmes asymptotes, les champs d'ondes sont polarisés (la construction d'Huyghens montre que dans le cas de Bragg, il peut y avoir réflexion totale d'une seule polarisation incidente). Pour  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_K$ :

$$1 - n^2 = \frac{N_0 \pm |N_K \pm Q_K^z|}{E}. \quad (30)$$

Il est logique que les champs d'ondes soient polarisés lors de la diffraction par un antiferromagnétique, colinéaire ou non, tel que  $\mathbf{Q}_K$  soit réel. En effet, si on quantifie selon  $\mathbf{Q}_K$ ,  $U^{\pm\mp} = Q_K^\pm = 0$ : la polarisation par rapport à  $\mathbf{Q}_K$  est conservée, le spin du neutron précesse autour de  $\mathbf{Q}_K$ . Il n'en est pas de même dans un ferromagnétique, où la polarisation est analysée suivant  $\mathbf{Q}_0$  et non suivant  $\mathbf{Q}_K$ .

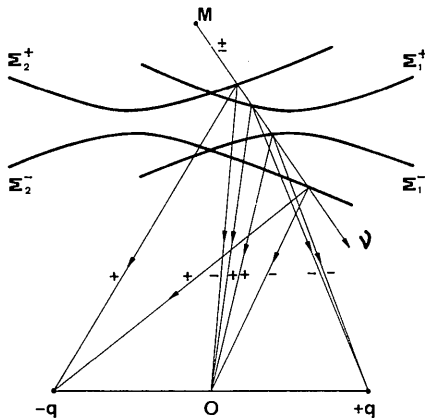


Fig. 4. Diffraction sur un cristal hélimagnétique (sans composante ferromagnétique).  $\mathbf{q}$  et  $-\mathbf{q}$  sont les deux directions de Bragg. Les faisceaux diffractés sont entièrement polarisés. L'hyperbole  $\Sigma^+$  est définie par la direction  $+\mathbf{q}$ ,  $\Sigma^-$  par la direction  $-\mathbf{q}$ .

. Le résultat ci-dessus subsiste si  $\mathbf{Q}_K$  est imaginaire pur, ou si ses composantes réelle et imaginaire  $\mathbf{Q}_K'$  et  $\mathbf{Q}_K''$  sont parallèles. Par contre, si  $\mathbf{Q}_K' \wedge \mathbf{Q}_K''$  n'est pas nul (Sivardière, 1967), on ne peut quantifier à la fois suivant  $\mathbf{Q}_K'$  et  $\mathbf{Q}_K''$ , et donc découpler les deux états de spin du neutron:  $\Sigma$  est le degré 4, les champs d'ondes ne sont pas polarisés.

Enfin si la raie est purement magnétique (raie de surstructure),  $\Sigma$  a pour équation:

$$(A_0 A_K - Q_K^z Q_{-K}^z)^2 = 0. \quad (31)$$

$\Sigma$  possède deux nappes dégénérées par rapport au spin du neutron. Ce résultat est à relier à l'absence de double réfraction par un antiferromagnétique hors d'une position de Bragg.

Considérons enfin un cristal hélimagnétique, par exemple une répartition homogène de charges portant une densité hélicoïdale de moment magnétique (Nityananda & Ramaseshan, 1971; Felcher, 1973). Dans un tel cristal, la fonction d'onde neutronique a la forme de Bloch:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n \begin{pmatrix} \psi_n^+ \\ \psi_n^- \end{pmatrix} \exp [i(\mathbf{k}_0 + n\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}] \quad (32)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur d'onde de l'hélice. Seules trois composantes de Fourier de l'induction sont non nulles:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0^z + \mathbf{B}_1 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{B}_{-1} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (33)$$

avec:

$$\mathbf{B}_{\pm 1} = \mathbf{B}(x \pm iy). \quad (34)$$

$\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux vecteurs orthonormés du plan perpendiculaire à  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{B}_0^z$  une éventuelle composante ferromagnétique parallèle à  $\mathbf{q}$ . Le potentiel nucléaire se réduit dans ce modèle à une constante  $N_0$ . Le système (6) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 & 0 \\ 0 & k^2 - k_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n^+ \\ \psi_n^- \end{pmatrix} - \sum_{n'} \begin{pmatrix} N_{n-n'} + B_{n-n'}^z & B_{n-n'}^- \\ B_{n-n'}^+ & N_{n-n'} - B_{n-n'}^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{n'}^+ \\ \psi_{n'}^- \end{pmatrix} = 0. \quad (35)$$

Loin d'une position de Bragg, seule la composante  $n=0$  du champ d'onde est excitée, il y a double réfraction comme sur un ferromagnétique ordinaire. Plusieurs composantes sont au contraire excitées au voisinage d'une position de Bragg  $\pm \mathbf{q}$ . Le système (35) fournit les relations suivante (pour  $n=0, 1$  et  $-1$ ):

$$[k^2 - k_0^2 - (N_0 + B_0^z)] \psi_0^+ = B_{-1} \psi_1^- \quad (36a)$$

$$[k^2 - k_0^2 - (N_0 - B_0^z)] \psi_0^- = B_1 \psi_{\pm 1}^+ \quad (36b)$$

$$(k^2 - (k_0 + q)^2 - (N_0 - B_0^z)) \psi_1^- = B_1 \psi_0^+ \quad (36c)$$

$$[k^2 - (k_0 - q)^2 - (N_0 + B_0^z)] \psi_{\pm 1}^+ = B_{-1} \psi_0^- \quad (36d)$$

De (36a) et (36c), on déduit l'équation de la première nappe  $\Sigma^+$  de la surface de dispersion:

$$[k^2 - k_0^2 - (N_0 + B_0^z)] [k^2 - (k_0 + q)^2 - (N_0 - B_0^z)] = B^2 \quad (37a)$$

et de (36b) et (36d), l'équation de la deuxième nappe  $\Sigma^-$ :

$$[k^2 - k_0^2 - (N_0 - B_0^z)] [k^2 - (k_0 - q)^2 - (N_0 + B_0^z)] = B^2. \quad (37b)$$

(37a) décrit la double réfraction et la double diffraction d'un faisceau incident de polarisation positive; (37b) la double réfraction et la double diffraction d'un faisceau de polarisation négative. Chaque nappe de  $\Sigma$  est engendrée par une hyperbole dont les asymptotes sont tangentes à des cercles de centres respectifs 0 et  $\pm \mathbf{q}$  (Fig. 4); en utilisant les notations (23), (37) devient en effet:

$$(\chi_{\pm}^2 - k_0^2) (\chi_{\mp}^2 - k_{\pm q}^2) = B^2, \quad (38)$$

et les faisceaux diffractés sont polarisés.

Je remercie A. Bourret, A. Renault et M. Schlenker pour de fructueuses discussions.

## APPENDICE

### Diffraction nucléaire magnétique

Si les noyaux diffuseurs sont magnétiques, la longueur Fermi dépend du moment angulaire de l'état intermédiaire neutron incident + noyau, et le potentiel diffuseur d'une cible polarisée s'écrit:

$$N'(r) = N(r) + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (A1)$$

avec:

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{I} \delta(r - r_j); \quad (A2)$$

$\mathbf{I}$  est le spin du noyau,  $\mathbf{H}(r)$  le pseudo-champ magnétique créé par les noyaux (Baryshevskii & Podgoretskii, 1965):

$$\mathbf{H}(r) = \sum_{\mathbf{K}} H_{\mathbf{K}} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}); \quad (A3)$$

$H_{\mathbf{K}}$  est le facteur de structure des spins nucléaires. Le système (6) devient alors:

$$\begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 & 0 \\ 0 & k^2 - k_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}}^+ \\ \psi_{\mathbf{K}}^- \end{pmatrix} - \sum_{\mathbf{K}'} \begin{pmatrix} N_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'} + H_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^z & H_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^- \\ H_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^+ & N_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'} - H_{\mathbf{K}-\mathbf{K}'}^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}'}^+ \\ \psi_{\mathbf{K}'}^- \end{pmatrix} = 0. \quad (A4)$$

Loin d'une position de Bragg, (A4) se réduit à:

$$\begin{pmatrix} k^2 - k_0^2 - (N_0 + H_0^z) & H_0^- \\ H_0^+ & k^2 - k_0^2 - (N_0 - H_0^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^- \end{pmatrix} = 0. \quad (A5)$$

En quantifiant selon la direction  $\mathbf{H}_0$  du ferro-magnétisme nucléaire, on voit que les ondes  $\psi_0^+$  et  $\psi_0^-$  sont réfractées avec deux indices différents:

$$1 - n_{\pm}^2 = \frac{N_0 \pm H_0}{k^2} \quad (A6)$$

où  $N_0 \pm H_0$  sont bien les amplitudes de diffusion vers l'avant sans changement de l'état de spin du neutron.

Au voisinage d'une position de Bragg, il y a quadruple réfraction et quadruple diffraction.  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_{\mathbf{K}}$  étant parallèles, on choisit encore leur direction commune comme axe de quantification. Alors l'équation de la surface de dispersion  $\Sigma$  se factorise:

$$\begin{vmatrix} a_0^+ & -(N_{-\mathbf{K}} + H_{-\mathbf{K}}) \\ -(N_{\mathbf{K}} + H_{\mathbf{K}}) & a_{\mathbf{K}}^+ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0^- & -(N_{-\mathbf{K}} + H_{-\mathbf{K}}) \\ -(N_{\mathbf{K}} + H_{\mathbf{K}}) & a_{\mathbf{K}}^- \end{vmatrix} = 0 \quad (A7)$$

avec:

$$\begin{aligned} a_0^{\pm} &= k^2 - k_0^2 - (N_0 \pm H_0) \\ a_{\mathbf{K}}^{\pm} &= k^2 - k_{\mathbf{K}}^2 - (N_0 \pm H_0). \end{aligned} \quad (A8)$$

Contrairement au cas du ferromagnétisme électronique, chaque nappe  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  de  $\Sigma$  décrit des champs d'ondes polarisés.

### Références

- BARYSHEVSKII, V. G. & PODGORETSKII, M. I. (1965). *Sov. Phys. JETP*, **20**, 704-706.  
 BATTERMAN, B. W. & COLE, H. (1964). *Rev. Mod. Phys.* **36**, 681-717.  
 EKSTEIN, H. (1949). *Phys. Rev.* **76**, 1328-1331.  
 FELCHER, G. P. (1973). *Solid State Commun.* **12**, 1167-1171.  
 GOLDBERGER, M. L. & SEITZ, F. (1947). *Phys. Rev.* **71**, 294-310.  
 HAMILTON, W. C. (1958). *Acta Cryst.* **11**, 585-594.  
 HERPIN, A. (1957). *J. Phys. Radium*, **18**, 649-655.  
 KATO, N. (1964). *J. Phys. Soc. Japan*, **19**, 971-982.  
 MOON, R. M., RISTE, T. & KOEHLER, W. C. (1969). *Phys. Rev.* **181**, 920-931.  
 NITYANANDA, R. & RAMASESHAN, S. (1971). *Solid State Commun.* **9**, 1003-1006.  
 SHULL, C. G. (1968). *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1585-1589.  
 SIVARDIÈRE, J. (1967). *Solid State Commun.* **5**, 289-292.